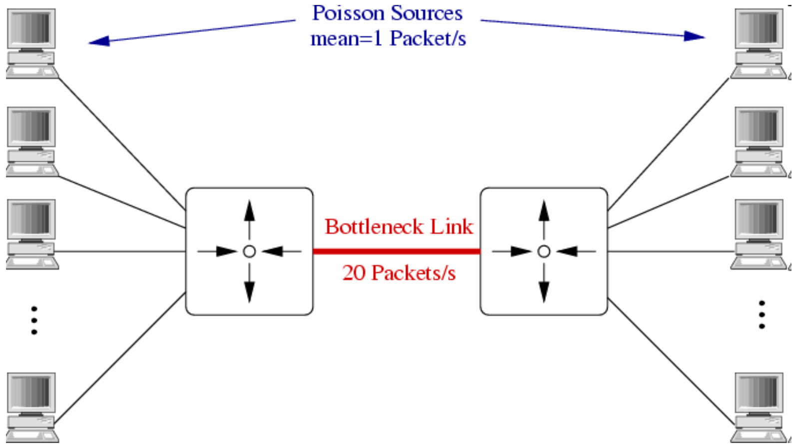
Modelos de Colas Poissonianos



CONTENIDOS

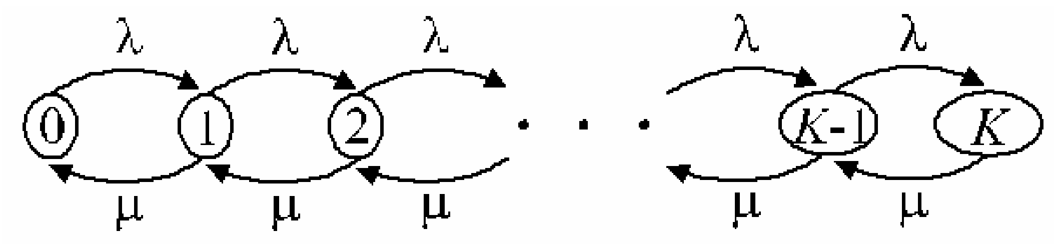
3. Modelo *M/M/1/K*: Capacidad *K* finita del sistema

Se admite a lo sumo un número *K* de clientes en el sistema, de forma que no se permiten más entradas en el sistema si se alcanza tal cota, siendo rechazadas. Así, las tasas de nacimiento y muerte dependen del número de clientes en el sistema

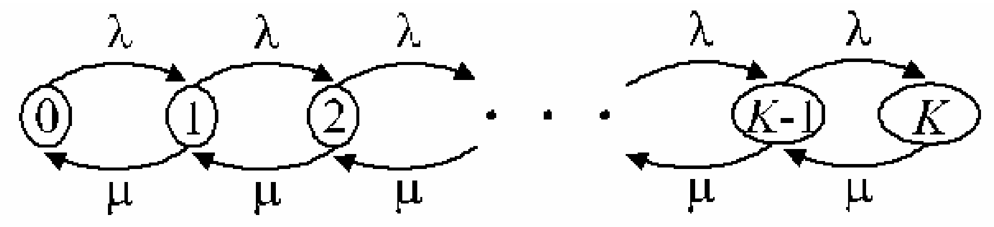
$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & \text{si } n = 0, 1, ..., K-1 \\ 0, & \text{si } n \geq K \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} \mu, & \text{si } n = 1, 2, ..., K \\ 0, & \text{si } n > K \end{cases}$$

y su diagrama de transición es



Modelo con un servidor y capacidad finita *M/M/1/K*



El sistema de ecuaciones en equilibrio es:

Estado	Tasa entrada	=	Tasa salida
0	$\mu\pi_1$	$=$	$\lambda\pi_0$
$1 \leq n \leq K-1$	$\lambda\pi_{n-1} + \mu\pi_{n+1}$	$=$	$(\lambda+\mu)\pi_n$
K	$\lambda\pi_{K-1}$	$=$	$\mu\pi_K$

Resolviéndolo se obtiene:

$$\lambda\pi_0 = \mu\pi_1 \quad \Rightarrow \pi_1 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_0$$

$$\lambda\pi_1 = \mu\pi_2 \quad \Rightarrow \pi_2 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \pi_0$$

$$\ldots$$

$$\lambda\pi_{K-1} = \mu\pi_K \quad \Rightarrow \pi_K = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^K \pi_0$$

Modelo con un servidor y capacidad finita *M/M/1/K*

Sumando todas las ecuaciones, como $\sum_{n=0}^{K} \pi_n = 1$, pues $\pi_n = 0$ para $n > K$, se tiene que

$$1 = \pi_0 \sum_{n=0}^{K} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \pi_0 \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}},$$

Por tanto, si $\lambda \neq \mu$,

$$\pi_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1 - \dfrac{\lambda}{\mu}}{1 - \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}, \quad n = 0, 1, 2, ..., K.$$

Puede comprobarse usando las expresiones de S_1 y S_2 que en este modelo existe solución de equilibrio para todo λ y μ, incluso para $\lambda \geq \mu$.

El truncamiento del sistema a K clientes lo explica, pues el sistema nunca se desborda ni crece indefinidamente al rechazar a los clientes que llegan cuando está lleno (la cadena de Markov asociada es irreducible y finita y, por tanto, ergódica).

Modelo con un servidor y capacidad finita *M/M/1/K*

Si λ = μ, la distribución de probabilidad del número de clientes en el sistema es uniforme

$$\pi_n = \frac{1}{K+1}, \quad n = 0, 1, 2, ..., K.$$

Si eliminásemos el truncamiento, es decir $K \to \infty$, cuando $\lambda < \mu$ las expresiones de π_n se convierten en las obtenidas para el modelo *M/M/1*.

Modelo con un servidor y capacidad finita *M/M/1/K*

Medidas de rendimiento

Comenzamos con el número medio de clientes en el sistema. Para λ = μ,

$$L = E(N) = \sum_{n=0}^{K} n\pi_n = \frac{1}{K+1}\sum_{n=0}^{K} n = \frac{K(K+1)}{2(K+1)} = \frac{K}{2},$$

que ya esperábamos por ser uniforme.

Para λ ≠ μ, siendo *u* = λ/μ,

$$\begin{aligned} L = E(N) &= \sum_{n=0}^{K} n\pi_n = \sum_{n=0}^{K} nu^n\pi_0 = \pi_0 u \sum_{n=1}^{K} nu^{n-1} = \pi_0 u \frac{d}{du}\left(\sum_{n=0}^{K} u^n\right) \\ &= \pi_0 u \frac{d}{du}\left(\frac{1-u^{K+1}}{1-u}\right) = \frac{u[1-(K+1)u^K + Ku^{K+1}]}{(1-u)(1-u^{K+1})} \\ &= \frac{\lambda[1-(K+1)(\lambda/\mu)^K + K(\lambda/\mu)^{K+1}]}{(\mu-\lambda)[1-(\lambda/\mu)^{K+1}]}, \end{aligned}$$

Modelo con un servidor y capacidad finita *M/M/1/K*

que también puede expresarse como

$$\frac{u}{1-u} - \frac{(K+1)u^{K+1}}{1-u^{K+1}}$$

donde el primer sumando es la expresión de *L* del modelo *M/M/1*. Por tanto, el número esperado de clientes en el sistema *M/M/1/K* es siempre menor que en el *M/M/1*, haciéndolo más eficiente.

Como para todo λ y μ se tiene

$$\begin{aligned} L_s = E(N_s) &= E(N_s \mid N = 0)P(N = 0) + E(N_s \mid N > 0)P(N > 0) \\ &= 0\pi_0 + 1(1 - \pi_0) = 1 - \pi_0, \end{aligned}$$

entonces $L_q = L – L_s = L - (1 - \pi_0)$.

En este modelo se rechaza a los clientes que llegan cuando ya hay *K* en el sistema (*K*-1 en la cola), lo que ocurre con probabilidad π_K.

Modelo con un servidor y capacidad finita *M/M/1/K*

Luego, la probabilidad de que al llegar un cliente entre en el sistema es $1-\pi_K$, representando la proporción de tiempo que el sistema no está saturado o la proporción de clientes que llegan que realmente entran en el sistema.

Así, la tasa media de entradas al sistema o paso a través del sistema, $\lambda_e = \boldsymbol{\lambda}$, se define como

$$\lambda_e = \lambda(1 - \pi_K).$$

La utilización verdadera del servidor, ρ, probabilidad de que el servidor esté ocupado, ya no es $u = \lambda/\mu$ y de ahí que lo hayamos etiquetado u en vez de r, sino

$$\rho = \lambda_e W_s = \frac{\lambda}{\mu}(1 - \pi_K) = 1 - \pi_0.$$

Modelo con un servidor y capacidad finita *M/M/1/K*

Tiempos de espera

Entendiendo por clientes en el sistema aquellos que entran en el sistema, podemos aplicar las fórmulas de Little para conseguir los tiempos medios en el sistema y en la cola

$$W = L / \lambda_e \qquad W_q = L_q / \lambda_e$$

Para obtener el tiempo medio de espera en cola para aquellos clientes que deben esperar, hacemos como en el modelo *M/M/1*,

$$E(q \mid q > 0) = W_q / \rho = W_q / (1 - \pi_0).$$

El proceso de obtención de las distribuciones de los tiempos *q* y *w* es más complejo que en el modelo *M/M/1*. Como hicimos entonces, utilizaremos el teorema de la probabilidad total, pero ahora condicionando a la v.a. N_e, que cuenta el número de clientes en el sistema cuando entra un cliente en él.

Modelo con un servidor y capacidad finita *M/M/1/K*

Denotamos con $q_n=P(N_e=n)$, $n=0,1,2,...,K-1$, la probabilidad de que un cliente que entra en el sistema encuentre n clientes en él, que por el teorema de Bayes es

$$q_n = \frac{\pi_n}{1-\pi_K}, \quad n = 0, 1, 2, ..., K-1.$$

Nótese que en este modelo la entrada no es una verdadera Poisson, $p_n \neq q_n$, y $\lambda_n = \lambda$ para $n \leq K-1$ pero $\lambda_n = 0$ para $n \geq K$, a diferencia de lo que ocurría en el *M/M/1*. Así, para $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
F_w(t) = P(w \leq t) &= \sum_{n=0}^{K-1} P(w \leq t \mid N_e = n) P(N_e = n) \\
&= \sum_{n=0}^{K-1} \left[\int_0^t \mu e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^n}{n!} dx \right] q_n = \sum_{n=0}^{K-1} \left[1 - \int_t^\infty \mu e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^n}{n!} dx \right] q_n \\
&= \sum_{n=0}^{K-1} q_n - \sum_{n=0}^{K-1} q_n \left[\int_t^\infty \mu e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^n}{n!} dx \right] = \\
&= 1 - \sum_{n=0}^{K-1} q_n \left[\sum_{i=0}^{n} \frac{(\mu t)^i e^{-\mu t}}{i!} \right] = 1 - \sum_{n=0}^{K-1} q_n F_{\mathcal{P}(\mu t)}(n),
\end{aligned}$$

Modelo con un servidor y capacidad finita *M/M/1/K*

donde $$F_{\mathcal{P}(\mu t)}(n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(\mu t)^i e^{-\mu t}}{i!} = \int_t^{\infty} \mu \frac{\mu^n x^n e^{-\mu x}}{n!} dx$$

(igualdad debida a la relación entre las distribuciones de Erlang y Poisson) es la función de distribución de Poisson de parámetro μ*t* en el punto *n*, que puede obtenerse a partir de las tablas de dicha distribución.

De forma similar

$$\begin{aligned}
F_q(t) &= P(q=0) + P(0 < q \le t) = q_0 + \sum_{n=1} P(q \le t \mid N_e = n) P(N_e = n) \\
&= q_0 + \sum_{n=1}^{K-1} \left[\int_0^t \mu e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^{n-1}}{(n-1)!} dx \right] q_n = q_0 + \sum_{n=0}^{K-2} q_{n+1} \left[1 - \int_t^{\infty} \mu e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^n}{n!} dx \right] \\
&= q_0 + \sum_{n=0}^{K-2} q_{n+1} - \sum_{n=0}^{K-2} q_{n+1} \left[\int_t^{\infty} \mu e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^n}{n!} dx \right] = 1 - \sum_{n=0}^{K-2} q_{n+1} \left[\sum_{i=0}^{n} \frac{(\mu t)^i e^{-\mu t}}{i!} \right] \\
&= 1 - \sum_{n=0}^{K-2} q_{n+1} F_{\mathcal{P}(\mu t)}(n)
\end{aligned}$$